Глава 1.

Скалярное произведение векторов.

3. Выразим скалярное произведение через прямоугольные координаты сомножителей, то есть через координаты векторов в ортонормированном базисе. Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ в базисе $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то справедливость равенства очевидна. Рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. По теореме косинусов:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = OA^2 + OB^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) + \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right)\right] =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

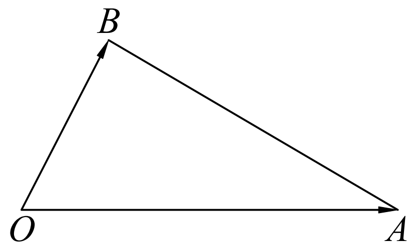

Рис. 1.7.1.

Заметим, что теорема косинусов, а, значит, и данное свойство верны даже в том случае, когда точки *O*, *A* и *B* лежат на одной прямой.

Глава 2.

2.2. Вычисление расстояния от точки до прямой.

Определение 2.2.1. Общее уравнение прямой (2.1.2) называется нормальным, если $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, то есть, если $a^2 + b^2 = 1$.

Если уравнение не является нормальным, его всегда можно привести к нормальному виду делением обеих частей на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$$

Пусть прямая l задается общим уравнением $ax+by+c=0$, точка $M_1(x_1,y_1)\notin l$. Выведем формулу для нахождения расстояния от точки M_1 до прямой l.

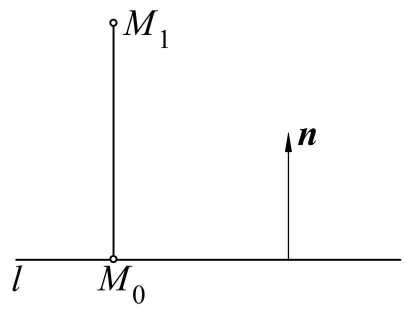

Рис. 2.2.1.

Пусть $M_0\in l$ и $\overrightarrow{M_1M_0}\parallel\vec{n}$. Тогда найдется $t\in R$ такое, что $\overrightarrow{M_0M_1}=t\vec{n}$.

Число t называется отклонением точки от прямой. Отклонение $t>0$ для тех точек M, которые расположены в одной полуплоскости с границей l, что и представитель нормального вектора $\vec{n}$, отложенный от некоторой точки прямой l. Отклонение $t<0$ для точек, расположенных в другой полуплоскости с границей l.

$$\overrightarrow{M_0M_1}=t\vec{n},\ \begin{cases}x_1-x_0=ta\\ y_1-y_0=tb\end{cases}.$$

Так как точка $M_0\in l$, то $ax_0+by_0+c=0$,

$$a(x_1-ta)+b(y_1-tb)+c=0,$$

$$ax_1+by_1+c-t(a^2+b^2)=0,$$

$$t=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2},$$

$$d_{M_1,l} = |\overrightarrow{M_1M_0}| = |t||\vec{n}| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Итак,

$$d_{M_1,l} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В частности, если прямая *l* задается нормальным уравнением, то

$$d_{M_1,l} = |ax_1 + by_1 + c|.$$

2.3. Геометрический смысл знака трехчлена $ax + by + c$.

Рассмотрим прямую *l*: $ax + by + c = 0$. Тогда знак трехчлена $ax + by + c$ совпадает со знаком отклонения точек *M* от прямой *l*:

$$t_{M,l} = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из предыдущего параграфа следует, что неравенство $ax + by + c > 0$ определяет полуплоскость с границей *l*, которая содержит представитель нормального вектора прямой *l*, отложенный от некоторой ее точки. Неравенство $ax + by + c < 0$ определяет вторую полуплоскость с границей *l*.

Материал этого параграфа позволяет задавать аналитически внутренние области многоугольников. Так, например, внутренняя область выпуклого *n*-угольника может быть задана системой *n* линейных неравенств с двумя неизвестными.

2.9. Вычисление расстояния от точки до плоскости.

Определение 2.9.1. Общее уравнение плоскости (2.8.2) называется нормальным, если $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$, то есть, если $a^2+b^2+c^2=1$.

Если уравнение не является нормальным, его всегда можно привести к нормальному виду делением обеих частей на $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0.$$

Пусть плоскость α задается общим уравнением $ax+by+cz+d=0$, точка $M_1(x_1,y_1,z_1)\notin\alpha$. Выведем формулу для нахождения расстояния от точки M_1 до плоскости α.

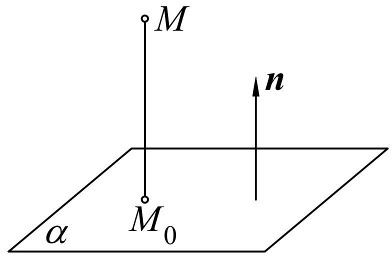

Рис. 2.9.1.

Пусть $M_0\in\alpha$ и $\overline{M_1M_0}\parallel\vec{n}$. Тогда найдется $t\in R$ такое, что $\overline{M_0M_1}=t\vec{n}$.

Число *t* называется отклонением точки от плоскости. Отклонение $t>0$ для тех точек *M*, которые расположены в одном полупространстве с границей α, что и представитель нормального вектора $\vec{n}$, отложенный от некоторой точки плоскости α. Отклонение $t<0$ для точек, расположенных в другом полупространстве с границей α.

$$\overline{M_0M_1}=t\vec{n},\ \begin{cases} x_1-x_0=ta \\ y_1-y_0=tb. \\ z_1-z_0=tc \end{cases}$$

Так как точка $M_0\in\alpha$, то $ax_0+by_0+cz_0+d=0$,

$$a(x_1-ta)+b(y_1-tb)+c(z_1-tc)+d=0,$$

$$ax_1+by_1+cz_1+d-t(a^2+b^2+c^2)=0,$$

$$t = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$d_{M_1,\alpha} = |\overrightarrow{M_1M_0}| = |t||\vec{n}| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Итак,

$$d_{M_1,\alpha} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

В частности, если плоскость α задается нормальным уравнением, то $d_{M_1,\alpha} = |ax_1 + by_1 + cz_1 + d|$.

Глава 3.

Линии и поверхности второго порядка.

3.1. Эллипс.

Определение 3.1.1. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем $2a > F_1F_2$.

$$Э = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a,\ 2a > F_1F_2\}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O совпадало с серединой отрезка F_1F_2, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F}_2$.

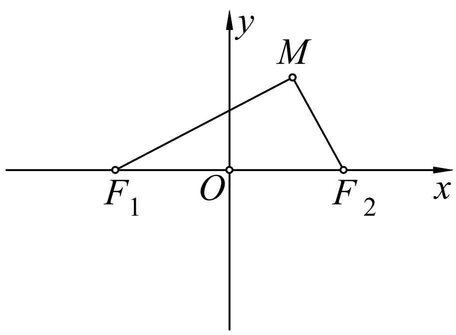

Рис. 3.1.1.

Пусть $F_1F_2 = 2c$, тогда $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

$$M(x,y)\in Э \leftrightarrow MF_1+MF_2=2a\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\rightarrow$$

$$\rightarrow a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Так как $a^2-c^2>0$, то введем обозначение: $a^2-c^2=b^2$. Тогда

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.1.1)$$

Для того, чтобы можно было утверждать, что уравнение (3.1.1) является уравнением эллипса, необходимо показать обратное, а именно, если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (3.1.1), то эта точка лежит на эллипсе.

Пусть точка $N(x_1,y_1)$ такая, что $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$. Покажем, что $N\in Э$.

$$NF_1=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+c)^2+b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x_1^2+2cx_1+c^2+a^2-c^2-x_1^2+\left(\frac{cx_1}{a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{cx_1}{a}\right)^2}=\left|a+\frac{cx_1}{a}\right|$$

Аналогично можно показать, что

$$NF_2=\left|a-\frac{cx_1}{a}\right|.$$

Так как $|x_1|\le a$, то

$$NF_1 = a + \frac{cx_1}{a},\ NF_2 = a - \frac{cx_1}{a},\ NF_1 + NF_2 = 2a\,.$$

Итак, $N \in Э$, а, значит, уравнение (3.1.1) является уравнением эллипса. Это уравнение называется каноническим.

Свойства эллипса.

1. Эллипс имеет две оси симметрии, называемые главными осями. Действительно, если $M(x,y) \in Э$, то $M_1(-x,y) \in \acute{Y}$ и $M_2(x,-y) \in \acute{Y}$.
2. Эллипс имеет центр симметрии, называемый центром эллипса. Действительно, если $M(x,y) \in Э$, то $M_1(-x,-y) \in Э$.
3. Эллипс пересекается с осью OX в точках $(\pm a, 0)$, с осью OY – в точках $(0, \pm b)$. Точки пересечения эллипса с главными осями называются вершинами эллипса. Большее расстояние между противоположными вершинами называется длиной большой оси, меньшее – длиной малой оси. Так для уравнения (3.1.1) эта длина большой оси равна $2a$, малой – $2b$.
4. Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, стороны которого задаются уравнениями $|x| = a$ и $|y| = b$. Действительно, $x^2/a^2 \le 1$ и $y^2/b^2 \le 1$.
5. Исследуем поведение эллипса в первой четверти.

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

При изменении x от 0 до a y монотонно убывает от b до 0.

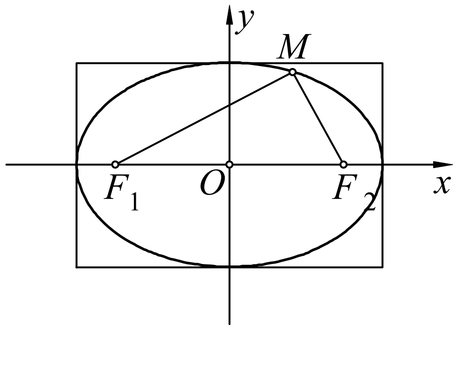

Рис. 3.1.2.

Определение 3.1.2. Эксцентриситетом эллипса называется число, равное отношению расстояния между фокусами к длине большой оси.

$$0 \le e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1$$

Эксцентриситет определяет форму эллипса.

Определение 3.1.3. Расстояние от точки эллипса до его фокуса называется фокульным радиусом.

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$r_1 = MF_1 = a + ex,\ r_2 = MF_2 = a - ex.$$

Определение 3.1.4. Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{e}$.

Значит, уравнения директрис имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

Так как $\frac{a}{e} > a$, то директрисы не пересекают эллипса.

6. Отношение расстояния от произвольной точки эллипса до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса e.

$$\frac{MF_i}{d_{M,l_i}} = e,\ i = \overline{1,2}.$$

Доказательство.

$$MF_1 = a + ex,$$

$$d_{M,l_1} = \left|x + \frac{a}{e}\right| = x + \frac{a}{e},$$

$$\frac{MF_1}{d_{M,l_1}} = \frac{a + ex}{x + \frac{a}{e}} = e.$$

Справедливость свойства для второго случая доказывается аналогично.

Замечание. Если в уравнении (3.1.1) $a < b$, то это уравнение также определяет эллипс, но с фокусами, лежащими на оси *OY*. В этом случае уравнение также называется каноническим.

3.2. Гипербола.

Определение 3.2.1. Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем $2a < F_1F_2$.

$$\Gamma=\{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a,\ 2a < F_1F_2\}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O совпадало с серединой отрезка F_1F_2, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$.

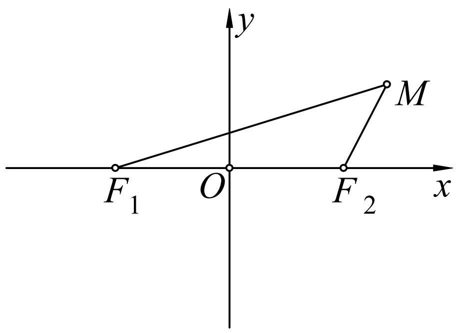

Рис. 3.2.1.

Пусть $F_1F_2 = 2c$, тогда $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

$$M(x,y) \in \Gamma \leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Так как $c^2-a^2>0$, то введем обозначение: $c^2-a^2=b^2$. Тогда

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.1.1)$$

Для того, чтобы можно было утверждать, что уравнение (2.1.1) является уравнением гиперболы, необходимо показать обратное, а именно, если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (2.1.1), то эта точка лежит на гиперболе.

Пусть точка $N(x_1,y_1)$ такая, что $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$. Покажем, что $N\in\Gamma$.

$$NF_1=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+c)^2-b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x_1^2+2cx_1+c^2+a^2-c^2-x_1^2+\left(\frac{cx_1}{a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{cx_1}{a}\right)^2}=\left|\frac{cx_1}{a}+a\right|$$

Аналогично можно показать, что

$$NF_2=\left|\frac{cx_1}{a}-a\right|.$$

Так как $|x_1|\geq a$, то для $x_1\geq a$

$$NF_1=\frac{cx_1}{a}+a,\ NF_2=\frac{cx_1}{a}-a,\ |NF_1-NF_2|=2a,$$

а для $x_1\leq -a$

$$NF_1=-\frac{cx_1}{a}-a,\ NF_2=-\frac{cx_1}{a}+a,\ |NF_1-NF_2|=2a.$$

Итак, $N\in\Gamma$, а, значит, уравнение (2.1.1) является уравнением гиперболы. Это уравнение называется каноническим.

Свойства гиперболы.

1. Гипербола имеет две оси симметрии, называемые главными осями. Действительно, если $M(x,y)\in \Gamma$, то $M_1(-x,y)\in \Gamma$ и $M_2(x,-y)\in \Gamma$.
2. Гипербола имеет центр симметрии, называемый центром гиперболы. Действительно, если $M(x,y)\in \Gamma$, то $M_1(-x,-y)\in \Gamma$.
3. Гипербола пересекается с осью *OX* в точках $(\pm a,0)$ и не пересекается с осью *OY*. Ось, не пересекающая гиперболы, называется мнимой, пересекающая – действительной. Точки пересечения гиперболы с действительной осью называются вершинами гиперболы. Расстояние между вершинами называется длиной действительной оси. Так для уравнения (2.1.1) эта длина равна $2a$.
4. Исследуем поведение гиперболы в первой четверти.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

При изменении x от a до $+\infty$ y монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Покажем, что при этом гипербола будет сколь угодно близко приближаться к прямой $y=\frac{b}{a}x$. Пусть отрезок *MK* перпендикулярен это прямой, а отрезок *MN* параллелен оси *OY*.

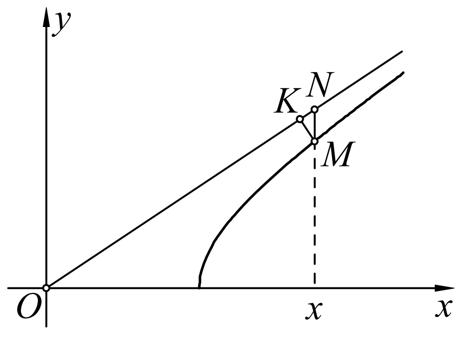

Рис. 3.2.2.

$$\lim_{x\to+\infty} MN=\lim_{x\to+\infty}(y_N-y_M)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$$

А так как $MK < MN$, то и $MK \to 0$ при $x \to +\infty$.

Таким образом, прямые, задаваемые уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$, являются асимптотами гиперболы. Каждая из них является диагональю прямоугольника, стороны которого задаются уравнениями $|x|=a$ и $|y|=b$.

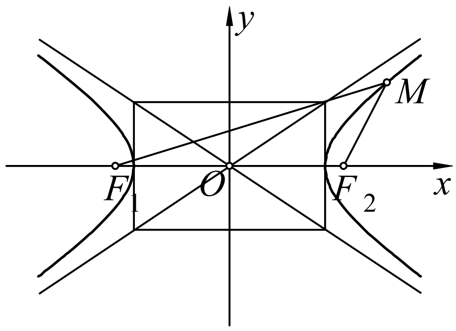

Рис. 3.2.3.

Определение 3.2.2. Эксцентриситетом гиперболы называется число, равное отношению расстояния между фокусами к длине действительной оси.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}>1$$

Эксцентриситет определяет форму гиперболы.

Определение 3.2.3. Расстояние от точки гиперболы до ее фокуса называется фокульным радиусом.

Из приведенных выше рассуждений следует, что при $x \ge a$

$$r_1 = MF_1 = a + ex,\ r_2 = MF_2 = -a + ex,$$

а при $x \le -a$

$$r_1 = MF_1 = -a - ex,\ r_2 = MF_2 = a - ex.$$

Определение 3.2.4. Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные мнимой оси и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{e}$.

Значит, уравнения директрис имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

Так как $\frac{a}{e} < a$, то директрисы не пересекают гиперболы.

5. Отношение расстояния от произвольной точки гиперболы до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы e.

$$\frac{MF_i}{d_{M,l_i}} = e,\ i = \overline{1,2}.$$

Доказательство.

Пусть $x \geq a$. Тогда

$$MF_1 = a + ex,$$

$$d_{M,l_1} = \left| x + \frac{a}{e} \right| = x + \frac{a}{e},$$

$$\frac{MF_1}{d_{M,l_1}} = \frac{a + ex}{x + \frac{a}{e}} = e.$$

Справедливость свойства для остальных случаев доказывается аналогично.

Замечание. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

также определяет гиперболу, но с действительной осью OY. Это уравнение также называется каноническим.

3.3. Парабола.

Определение 3.3.1. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и от данной прямой l, называемой директрисой.

$$П = \{M \mid MF = d_{M,l},\ F \notin l\}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось OX проходила через фокус F и была перпендикулярна директрисе l, начало координат O совпадало с серединой отрезка KF, где $K = l \bigcap OX$, и фокус F лежал бы на положительном направлении оси OX.

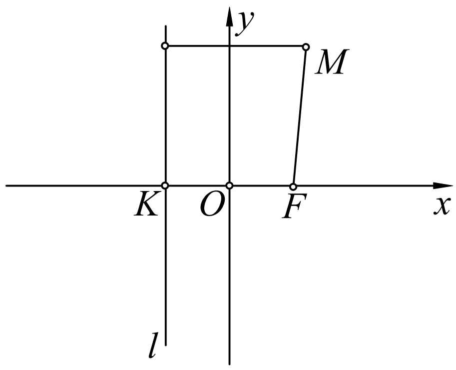

Рис. 3.3.1.

Пусть $KF = p$, тогда $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы l: $x = -\dfrac{p}{2}$.

$$M(x,y) \in \text{Ï} \leftrightarrow MF = d_{M,l} \leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \leftrightarrow y^2 = 2px$$

Итак,

$$y^2 = 2px. \qquad (3.1.1)$$

Для того, чтобы можно было утверждать, что уравнение (3.1.1) является уравнением параболы, необходимо показать обратное, а именно, если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (3.1.1), то эта точка лежит на параболе.

Пусть точка $N(x_1, y_1)$ такая, что $y_1^2 = 2px_1$. Покажем, что $N \in \varPi$.

$$NF = \sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1+\frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_1+\frac{p}{2}\right| = d_{N,l}$$

Итак, $N \in \varPi$, а, значит, уравнение (3.1.1) является уравнением параболы. Это уравнение называется каноническим.

Свойства параболы.

1. Парабола имеет одну ось симметрии. Действительно, если $M(x, y) \in \Pi$, то $M_1(x, -y) \in \Pi$.
2. Парабола имеет одну общую точку (0,0) с координатными осями.
3. Все точки параболы расположены в правой полуплоскости.

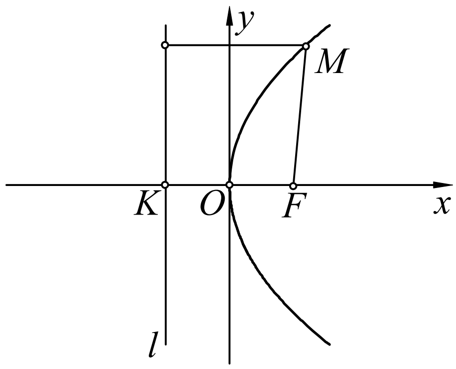

Рис. 3.3.2.

Замечание. Уравнение $y^2 = 2px$, где $p < 0$ также определяет параболу, ветви которой смотрят влево, а уравнение $x^2 = 2py$ – параболу с осью симметрии OY. Каждое из этих уравнений также называется каноническим.