НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ И СПЛАВОВ»

Кафедра математики и естествознания

Д. Д. Изаак

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум

Новотроицк-Орск, 2011

Содержание.

Часть 1.

Векторная алгебра.

Занятие 1.

Линейные операции над векторами.

Задачи для разбора у доски.

1.1. На оси OX найдите такую точку M, расстояние от которой до точки $N(2,-3,\sqrt{7})$ равнялось бы 5. Ответ: $M_1(5,0,0)$, $M_2(-1,0,0)$.

1.2. Даны точки $M(2,2)$ и $N(5,-2)$. Известно, что точка P лежит на оси OX, а угол MPN равен 90^0. Найдите координаты точки P.

Ответ: $P_1(6,0)$, $P_2(1,0)$.

1.3. Через точку $A(4,2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определите ее центр и радиус.

Ответ: $C_1(2,2)$, $r_1 = 2$, $C_2(10,10)$, $r_2 = 10$.

1.4. Известны длины четырех векторов: $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $|\vec{d}| = d$. Кроме того, известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 30^0$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{d}$, $\vec{d} \uparrow\downarrow (\vec{a} + \vec{b})$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|$. Ответ: $\sqrt{c^2 + (d - \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}})^2}$.

1.5. Определите координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(1,2,1)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1,0,2)$ и $B(-1,-2,0)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1.6. На оси OY найдите такую точку M, расстояние от которой до точки $N(-8,13)$ равнялась бы 17. Ответ: $M_1(0,28)$, $M_2(0;-2)$.

1.7. При каких α и β векторы $-2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарные?

Ответ: $\alpha = 4$, $\beta = -1$.

1.8. Даны четыре точки: $A(6,7,8)$, $B(8,2,6)$, $C(4,3,2)$, $D(2,8,4)$. Докажите, что $ABCD$ – ромб.

Дополнительные задачи.

1.9. Дан правильный пятиугольник *ABCDE*. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Занятие 2.
Линейные операции над векторами.

Задачи для разбора у доски.

2.1. В параллелепипеде $ABCDA^/B^/C^/D^/$ $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AA^/}$. Найдите: а) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; б) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-\vec{p}$; в) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AC^/}$, б) $\overrightarrow{A^/O}$, в) $\overrightarrow{CA_1}$,

O–центр $ABCD$, A_1–середина $AA^/$.

2.2. Отрезки AD, BE и CF – медианы в треугольнике ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

2.3. Точка M – точка пересечения медиан в треугольнике ABC, точка O – произвольная точка пространства. Докажите справедливость равенства $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

2.4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, а на диагонали AC – вектор $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Докажите, что $\overrightarrow{KL}\parallel\overrightarrow{LB}$ и найти λ, если $\overrightarrow{KL}=\lambda\cdot\overrightarrow{LB}$. Ответ: $\lambda=\frac{1}{5}$.

2.5. Даны векторы: $\vec{e}_1(-1,2)$, $\vec{e}_2(2,1)$, $\vec{a}(0,-2)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Ответ: $\vec{a}\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

2.6. Дана пирамида *OABC*. Точки *D* и *E* – середины ребер *OA* и *BC* соответственно. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{DE}$ в базисе $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2.7. В пирамиде *OABC* медиана *AL* грани *ABC* делится точкой *M* в отношении $AM : ML = 3 : 7$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Ответ: $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right)$.

2.8. Даны векторы $\vec{e}_1(0,2,6)$, $\vec{e}_2(3,-1,4)$, $\vec{e}_3(3,1,-2)$, $\vec{a}(15,11,-16)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Ответ: $(1,-2,7)$.

2.9. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найдите: а) координаты вектора $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; б) проекцию вектора $\vec{a} - \vec{b}$ на ось $\vec{j}$.

Ответ: а) $\left(3, \frac{11}{2}, 0\right)$, б) 6.

Дополнительные задачи.

2.10. Вне плоскости параллелограмма *ABCD* взята точка *O*. Точка *M* – точка пересечения его диагоналей. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Ответ: $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

2.11. Дана пирамида *SABCD*. Точка *E* – середина ребра *BC*, точка *M* делит отрезок *SE* в отношении $EM : ES = 1 : 3$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\}$. Ответ: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2.12. Даны векторы $\vec{e}_1(1,4,-3)$, $\vec{e}_2(0,2,9)$, $\vec{e}_3(-5,1,-6)$, $\vec{a}(6,7,21)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Ответ: $(1,2,-1)$.

Занятие 3.

Определители.

Задачи для разбора у доски.

3.1. Вычислите устно: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 8 & -7 & -24 \end{vmatrix}$. Ответ: 0.

3.2. Вычислите по определению и разлагая по элементам 1-й строки: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. Ответ: 0.

3.3. Вычислите по определению: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. Ответ: 3.

3.4. Вычислите, разлагая по элементам 3-го столбца: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Ответ: –14.

3.5. Вычислите, разлагая по элементам 1-й строки, делая нули в первом столбце и приведя к треугольному виду: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответ: –123.

3.6. Вычислить, делая нули в первом столбце: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$.

Ответ: 232.

Задачи для самостоятельного решения.

3.7. Вычислите: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. Ответ: 40.

3.8. Вычислите: $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$. Ответ: –21.

3.9. Вычислите: $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$. Ответ: 18.

3.10. Вычислите: $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Ответ: –9.

3.11. Вычислите: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Ответ: –66.

Дополнительные задачи.

3.12. Вычислите: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix}$. Ответ: $n!$.

3.13. Вычислите: $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. Ответ: 0.

3.14. Известно, что $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$. Найдите $\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$.

Ответ: $(-1)^{n-1}\Delta$.

3.15. Вычислите: $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$. Ответ: 0.

3.16. Вычислите: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$. Ответ: 147.

3.17. Вычислите: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{vmatrix}$. Ответ: 434.

3.18. Решите уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & x^2 & x^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2$. Ответ: -1.

3.19. Решите уравнение: $\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -2$. Ответ: 1.

Занятие 4.

Деление отрезка в заданном отношении.

Скалярное произведение векторов.

Задачи для разбора у доски.

4.1. Выведите формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении. Ответ: $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.

4.2. Треугольник ABC задан координатами вершин: $A(1,1,1)$, $B(4,5,1)$, $C(1,0,1)$. AD – биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$. Ответ: $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6},0\right)$.

4.3. Найдите угол, образованный единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ перпендикулярны.

Ответ: 60^0.

4.4. Известны длины трех векторов: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$. Кроме того, известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$.

Ответ: -13.

4.5. Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, перпендикулярны. Ответ: $\arccos 0{,}8$.

4.6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M – центр грани ADD_1A_1, точка $N \in BB_1$, причем $BN : NB_1 = 1:3$, точка K – середина ребра C_1D_1. Найдите угол между прямыми MN и KC. Ответ: $\arccos\dfrac{6}{\sqrt{105}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

4.7. Найдите вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{6}$.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{35}{3},\dfrac{10}{3}\right)$.

4.8. Известно, что $\vec{x}\perp\vec{a}_1(2,3,-1)$, $\vec{x}\perp\vec{a}_2(1,-2,3)$, $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$. Найдите вектор $\vec{x}$. Ответ: $(-3,3,3)$.

4.9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и AD_1 двумя способами. Ответ: 60^0.

4.10. Дана пирамида *SABCD*, в основании которой лежит квадрат *ABCD*. Известно, что $SA\perp(ABCD)$, $AS=4AB$, *L* – середина *AS*, *K* – середина *CD*. Найдите угол между прямыми *SK* и *BL*. Ответ: $\arccos\frac{17}{\sqrt{345}}$.

Дополнительные задачи.

4.11. Дана правильная пирамида *SABC*. Точка *M* – середина *AS*, *N* – середина *SC*, *L* – середина *BC*. Найдите угол между прямыми *MN* и *SL*.

Ответ: $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Занятие 5.
Скалярное произведение векторов.

Задачи для решения у доски.

5.1. Докажите справедливость тождества и выясните его геометрический смысл: $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2})$.

Ответ: $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

5.2. Найдите составляющую вектора $\vec{a}(1,2,-4)$ на вектор $\vec{e}(2,1,2)$.

Ответ: $\left(-\frac{8}{9},-\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

5.3. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. При каком α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут перпендикулярны? Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

5.4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют углы в 60^0, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$. Подсказка: найдите скалярный квадрат искомого вектора. Ответ: 10.

5.5. Каковы должны быть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a}-\vec{b}$. Ответ: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

5.6. Про векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=30^0$. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

5.7. Заданы две точки $M(-5,7,-6)$ и $N(7,-9,9)$ и вектор $\vec{a}(1,-3,1)$. Найдите проекцию вектора $\vec{a}$ на ось *MN*. Ответ: 3.

5.8. Известно, что $\vec{x}\,||\,\vec{a}(6,-8,-7\frac{1}{2})$, $|\vec{x}|=50$, $\vec{x}\,\hat{}\,\vec{k}$ – острый. Найдите вектор $\vec{x}$. Ответ: $(-24,32,30)$.

5.9. Известно, что $\vec{x}\,||\,\vec{a}(2,1,-1)$ и $\vec{a}\cdot\vec{x}=3$. Найти вектор $\vec{x}$.

Ответ: $\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

5.10. Найти составляющую вектора $\vec{a}(2,3,-1)$ на вектор $\vec{e}(2,1,-4)$.

Ответ: $\left(\frac{22}{21},\frac{11}{21},-\frac{44}{21}\right)$.

Дополнительные задачи.

5.11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка *M* – центр грани *ABCD*, точка $K \in A_1B_1$, причем $A_1K:KB_1=3:1$, точка $L \in CC_1$, причем $CL:LC_1=2:1$. Найти угол между прямыми *MK* и D_1L. Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{210}}$.

5.12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M – середина ребра DD_1, точка $K \in CD$, причем $CK:KD = 1:2$, точка $L \in AA_1$, причем $AL:LA_1 = 1:3$. Найти угол между прямыми C_1M и LK. Ответ: $\arccos\frac{13}{\sqrt{1085}}$.

5.13. Известно, что $\vec{a}(1,1)$, $\vec{b}(1,-1)$, $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$, $\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Ответ: $-\frac{4}{5}$.

Занятие 6.

Векторное произведение векторов.

Задачи для решения у доски.

6.1. Известно, что $|\vec{a}_1| = 1$, $|\vec{a}_2| = 2$, $\vec{a}_1 {}^\wedge \vec{a}_2 = \frac{2\pi}{3}$. Вычислите: а) $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$; б) $|(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times (\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)|$; в) $|(\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2) \times (3\vec{a}_1 - \vec{a}_2)|$.

Ответ: а) $\sqrt{3}$, б) $3\sqrt{3}$, в) $10\sqrt{3}$.

6.2. Упростите: $[\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}] - [\vec{j}, \vec{i} + \vec{k}] + [\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$.

Ответ: $2(\vec{k} - \vec{i})$.

6.3. Докажите, что $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ и выяснить геометрический смысл тождества.

6.4. Даны векторы $\vec{a}_1(3,-1,2)$, $\vec{a}_2(1,2,-1)$. Найдите: а) $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$; б) $(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_2$; в) $(2\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \times (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$.

Ответ: а) (–3,5,7), б) (–6,10,14), в) (–12,20,28).

6.5. Найдите высоту BD в треугольнике ABC, если $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения.

6.6. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, чтобы векторы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1-\vec{a}_2$ были коллинеарными?

Ответ: $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$.

6.7. Упростите: $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}-\vec{a}]+[\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}]$.

Ответ: $[\vec{a},\vec{c}]$.

6.8. Известно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=45^0$. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Ответ: $50\sqrt{2}$.

6.9. Найдите площадь треугольника *ABC*, если $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

6.10. Сила $\vec{F}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ приложена к точке $A(4,-2,3)$. Определить модуль момента $\overrightarrow{M}$ этой силы относительно точки $O(3,2,-1)$. Подсказка: модуль момента силы равен $|\overrightarrow{M}|=d\cdot|\vec{F}|$, где d – плечо.

Ответ: $\sqrt{41}$.

6.11. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{e}_1-\vec{e}_2$ и $4\vec{e}_1-5\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – единичные векторы, угол между которыми 45^0.

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

6.12. Найдите составляющую вектора $\vec{a}(-1,2,0)$, перпендикулярную плоскости векторов $\vec{e}_1(1,0,1)$ и $\vec{e}_2(1,1,1)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$.

6.13. Известно, что $\vec{x}\perp\vec{a}_1(4,-2,-3)$, $\vec{x}\perp\vec{a}_2(0,1,3)$, $|\vec{x}|=26$, угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{j}$ тупой. Найдите вектор $\vec{x}$. Решите задачу двумя способами.

Ответ: $(-6,-24,8)$.

Дополнительные задачи.

6.14. Известно, что $\vec{x}\perp\vec{a}_1(2,-3,1)$, $\vec{x}\perp\vec{a}_2(1,-2,3)$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$. Найдите вектор $\vec{x}$. Ответ: (7,5,1).

6.15. Упростите: $2\vec{i}[\vec{j},\vec{k}]+3\vec{j}[\vec{i},\vec{k}]+4\vec{k}[\vec{i},\vec{j}]$. Ответ: 3.

6.16. Известно, что $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{b}\,\hat{}\,\vec{d}=\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}$. Докажите, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$.

6.17. Известно, что $\vec{a}\parallel\vec{i}$, $\vec{b}\parallel(xoy)$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{k}$, $(3\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{i}+\vec{b})=\vec{0}$. Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ: $\vec{a}\left(\frac{1}{3},0,0\right)$, $\vec{b}(0,-3,0)$.

6.18. Про векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ и $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=135^0$. Во сколько раз вектор $(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{b}+\vec{a}$ длиннее вектора $[\vec{a},\vec{b}]$? Ответ: $\sqrt{5}$.

6.19. Про векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $|\vec{a}|=1$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=60^0$. Во сколько раз вектор $(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{a}+\vec{b}$ длиннее вектора $[\vec{a},\vec{b}]$? Ответ: $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

6.20. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка S – середина ребра AB, точка $N\in BC$, причем $CN=2BN$. Найдите $\cos\left(\overrightarrow{SN}\,\hat{}\,[\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{DA_1}]\right)$. Ответ: $-\sqrt{\frac{2}{13}}$.

6.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка S – середина ребра CC_1, точка N – середина ребра BC. Найдите $\cos\left(\overrightarrow{SN}\,\hat{}\,[\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC}]\right)$. Ответ: 120^0.

6.22. Найдите высоту BD в треугольнике ABC, если а) $A(1,4,-2)$, $B(6,1,0)$, $C(-4,-3,1)$; б) $A(2,3,4)$, $B(4,2,3)$, $C(6,1,0)$; в) $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,0,5)$. Ответ: а) $\frac{15\sqrt{14}}{\sqrt{83}}$, б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, в) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6.23. Даны векторы $\vec{a}(1,1,2)$, $\vec{b}(1,3,-2)$, $\vec{c}(4,0,1)$. Найдите $(\vec{a}\times\vec{b},(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b})$.

Ответ: 168.

Занятие 7.

Смешанное произведение векторов.

Задачи для разбора у доски.

7.1. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}_1| = 4$, $|\vec{a}_2| = 2$, $|\vec{a}_3| = 3$. Вычислите $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$.

Ответ: 24.

7.2. Докажите, что какие бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарные.

7.3. Вычислите высоту *DE* в пирамиде *ABCD*, если $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$, $D(3,4,-3)$. Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

7.4. Известно, что $\vec{a}_1(1,-1,3)$, $\vec{a}_2(-2,2,1)$, $\vec{a}_3(3,-2,5)$. Вычислите $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ и выясните ориентацию троек $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; $\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3$; $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2$.

Ответ: –7, Л, П, П.

7.5. Установите, образуют ли векторы базис: а) $\vec{a}_1(2,3,-1)$, $\vec{a}_2(1,-1,3)$, $\vec{a}_3(1,9,-11)$; б) $\vec{a}_1(3,-2,1)$, $\vec{a}_2(2,1,2)$, $\vec{a}_3(3,-1,-2)$. Ответ: а) Нет, б) Да.

7.6. Вычислите $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$, если $\vec{a}_1(1,3,0)$, $\vec{a}_2(6,8,-3)$, $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

Ответ: 190.

7.7. Вычислите объем пирамиды *OABC*, если $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Ответ: 8,5.

7.8. Вычислите объем пирамиды *ABCD*, если $A(2,-3,5)$, $B(0,2,1)$, $C(-2,-2,3)$, $D(3,2,4)$. Ответ: 6.

7.9. Докажите, что точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ принадлежат одной плоскости.

7.10. Вычислите высоту DE в пирамиде $ABCD$, если $A(1,1,3)$, $B(2,0,4)$, $C(5,-1,2)$, $D(4,2,3)$. Ответ: $S=\dfrac{\sqrt{38}}{2}$, $V=\dfrac{7}{3}$, $DE=\dfrac{14}{\sqrt{38}}$.

7.11. Покажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

Занятие 8.
Модульная работа №1.
Векторная алгебра.

Часть 2.

Прямая и плоскость.

Занятие 9.

Прямая на плоскости.

У доски сделать задачи 9.1(а), 9.2, 9.3(а), 9.4,

остальные – самостоятельно.

9.1. Напишите уравнение прямой, приведите его к общему виду, постройте прямую, приведите общее уравнение к нормальному виду, укажите расстояние от начала координат до прямой: а) l: $M_0(-1,2)$, $\vec{n}(2,2)$; б) l: $M_0(-1,2)$, $\vec{p}(3,-1)$; в) l: $M_0(-1,1)$, $\vec{p}(2,0)$; г) l: $M_1(1,2)$, $M_2(-1,0)$.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, б) $\frac{5}{\sqrt{10}}$, в) 1, г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9.2. Дана прямая l: $-2x+y-1=0$ и точка $M_0(-1,2)$. Найдите: а) расстояние от точки M_0 до прямой l; б) уравнение прямой $l^/$ такой, что $M_0 \in l^/$ и $l^/ \perp l$; в) уравнение прямой $l^{//}$ такой, что $M_0 \in l^{//}$ и $l^{//} \parallel l$.

Ответ: а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$, б) $x+2y-3=0$, в) $2x-y+4=0$.

9.3. Исследуйте взаимное расположение прямых l_1 и l_2. Если прямые параллельны, найдите расстояние между ними, если они пересекаются – точку пересечения и косинус угла между ними: а) l_1: $-2x+y-1=0$, l_2: $2y+1=0$; б) l_1: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}$, l_2: $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{0}$; в) l_1: $x+y-1=0$, l_2: $2x-2y+1=0$; г) l_1: $x+y-1=0$, l_2: $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}$.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$, б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, (1,0), в) 0, $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, г) $\sqrt{2}$.

9.4. Даны три точки: $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(6,1)$; а) напишите уравнение прямой AB; б) напишите уравнение высоты CD и вычислите ее длину; в) Найдите угол между высотой CD и медианой BM; г) напишите уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Ответ: а) $4x + y - 6 = 0$, б) $x - 4y - 2 = 0$, $\frac{19}{\sqrt{17}}$,

в) $\arccos\frac{19}{\sqrt{986}}$, г) AK: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$,

AS: $\frac{x-1}{4\sqrt{26}+\sqrt{17}} = \frac{y-2}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}$.

9.5. Вычислите расстояние от точки $M_0(1,1)$ до прямой l: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Занятие 10.

Уравнение плоскости.

Задачи для разбора у доски.

10.1. Дана точка $M(1,1,1)$ и плоскость α: $-2x + y - z + 1 = 0$. Найдите: а) уравнение плоскости β такой, что $\beta \parallel \alpha$ и $M \in \beta$; б) расстояние от точки M до плоскости α. Ответ: а) $2x - y + z - 2 = 0$, б) $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

10.2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1 и M_2 и перпендикулярную плоскости α, если $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, α: $-x + y - 1 = 0$. Ответ: $x + y - 3 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения.

10.3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $M_3(3,0,1)$. Ответ: $x + y - 3 = 0$.

10.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,1,1)$ и параллельной векторам $\vec{p}(0,1,2)$ и $\vec{q}(-1,0,1)$. Ответ: $x-2y+z=0$.

10.5. Исследуйте взаимное расположение плоскостей. Если плоскости параллельны, найдите расстояние между ними, если пересекаются – косинус угла между ними: а) α: $-x+2y-z+1=0$, β: $y+3z-1=0$; б) α: $2x-y+z-1=0$, β: $-4x+2y-2z-1=0$; в) α: $x-y+1=0$, β: $y-z+1=0$; г) α: $2x-y-z+1=0$, β: $-4x+2y+2z-2=0$.

Ответ: а) $\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{15}}$, б) $d=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

в) $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, г) Совпадают.

10.6. Вычислите объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями. Ответ: 8.

Дополнительные задачи.

10.7. Напишите уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями α: $x-3y+2z-5=0$, β: $3x-2y-z+3=0$.

Ответ: $2x+y-3z+8=0$, $4x-5y+z-2=0$.

10.8. Установите, лежат ли точки $M_1(2,-1,1)$ и $M_2(1,2,-3)$ в одном угле, в смежных или в вертикальных углах, образованных плоскостями α и β: а) α: $3x-y+2z-3=0$, β: $x-2y-z+4=0$; б) α: $2x-y+5z-1=0$, β: $3x-2y+6z-1=0$. Ответ: а) В смежных, б) В вертикальных.

10.9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка $K\in AD$, причем $AK=2KD$, S – середина ребра CD. Найдите расстояние от точки K до плоскости (SBB_1). Ответ: $\frac{4}{3\sqrt{5}}$.

Занятие 11.

Прямая в пространстве.

Задачи для разбора у доски.

11.1. Найдите плоскость, образованную двумя пересекающимися прямыми: $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ и $l_2: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

Ответ: $x-2z+5=0$.

11.2. Дана точка $M(0,1,2)$ и прямая l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$. Напишите: а) уравнение плоскости α, проходящей через точку M и прямую l; б) уравнение плоскости β, проходящей через точку M и перпендикулярную прямой l; в) уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l и расстояние от точки M до прямой l.

Ответ: а) $x-2y+z=0$, б) $2x+y-1=0$,

в) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-5}$, $3\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

11.3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,-2,1)$ и $M_2(3,1,-1)$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

11.4. Напишите каноническое уравнение прямой l: $\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\ x+2y-z-1=0\end{cases}$.

Ответ: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-4}=\dfrac{z-\frac{7}{3}}{-5}$.

11.5. Составьте уравнение плоскости β такой, что $l\subset\beta$ и $\beta\perp\alpha$, если l: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$, α: $x+4y-z+6=0$.

Ответ: $7x-2y-z=0$.

11.6. Составьте уравнение прямой $l^{/}$ такой, что $M\in l^{/}$, $l^{/}\subset\alpha$, $l^{/}\perp l$, если $M(3,3,-4)$, α: $x+y+z-2=0$, l: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$.

Ответ: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$.

Часть 3.

Линии и поверхности второго порядка.

Занятие 12.

Линии второго порядка.

1. Эллипс. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.1. $a>b$,

$MF_1+MF_2=2a$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $F_{1,2}(\pm c,0)$, $e=\frac{c}{a}<1$, $x=\pm\frac{a}{e}$, $\frac{MF_i}{d_{M,l_i}}=e$.

1.2. $a<b$,

$MF_1+MF_2=2b$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $F_{1,2}(0,\pm c)$, $e=\frac{c}{b}<1$, $y=\pm\frac{b}{e}$, $\frac{MF_i}{d_{M,l_i}}=e$.

2. Гипербола. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$.

2.1. $+1$, $|MF_1-MF_2|=2a$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_{1,2}(\pm c,0)$, $e=\frac{c}{a}>1$, $x=\pm\frac{a}{e}$,

$y=\pm\frac{b}{a}x$, $\frac{MF_i}{d_{M,l_i}}=e$.

2.2. -1, $|MF_1-MF_2|=2b$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_{1,2}(0,\pm c)$, $e=\frac{c}{b}>1$, $y=\pm\frac{b}{e}$,

$y=\pm\frac{b}{a}x$, $\frac{MF_i}{d_{M,l_i}}=e$.

3. Парабола.

3.1. $y^2=2px$, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $x=-\frac{p}{2}$, $MF=d_{M,l}$.

3.2. $x^2=2py$, $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, $y=-\frac{p}{2}$, $MF=d_{M,l}$.

Задачи для разбора у доски.

12.1. Постройте линию, определите ее тип, найдите полуоси, фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты, параметр p: а) $25x^2+9y^2=225$; б) $4x^2-25y^2=100$; в) $4x^2-25y^2=-100$; г) $y^2=-2x$.

а)	$a=3$, $b=5$, $c=4$, $F_{1,2}(0,\pm 4)$, $e=0{,}8$, $y=\pm\dfrac{25}{4}$.
б)	$a=5$, $b=2$, $c=\sqrt{29}$, $F_{1,2}(\pm\sqrt{29},0)$, $e=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$, $x=\pm\dfrac{25}{\sqrt{29}}$, $y=\pm\dfrac{2}{5}x$.
в)	$a=5$, $b=2$, $c=\sqrt{29}$, $F_{1,2}(0,\pm\sqrt{29})$, $e=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$, $y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{29}}$, $y=\pm\dfrac{2}{5}x$.
г)	$p=-1$, $F\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, $x=\dfrac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

12.2. Постройте линию, определите ее тип, найдите полуоси, фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты, параметр *p*: а) $8x^2+9y^2=72$; б) $2x^2+3=4y^2$; в) $x^2=4y$.

а)	$a=3$, $b=2\sqrt{2}$, $c=1$, $e=\dfrac{1}{3}$, $x=\pm 9$.
б)	$a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c=\dfrac{3}{2}$, $e=\sqrt{3}$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$.
в)	$p=2$, $F(0,1)$, $y=-1$.

Дополнительные задачи.

12.3. Найдите каноническое уравнение эллипса, если: а) $a=5$, $c=4$; б) $c=3$, $e=\dfrac{3}{5}$; в) $b=5$, $e=\dfrac{12}{13}$; г) $c=2$, расстояние между директрисами равно 5; д) $e=\dfrac{1}{2}$, расстояние между директрисами равно 32.

а)	$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{41}=1$.
б)	$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.
в)	$\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$, $\dfrac{169x^2}{625}+\dfrac{y^2}{25}=1$.
г)	$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{1}=1$, $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{5}=1$.
д)	$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$, $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

Занятие 13.

Линии второго порядка.

Задачи для разбора у доски.

13.1. Установите, что следующее уравнение определяет эллипс, найдите его центр, полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис: $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

Ответ: $C(3,-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $F_1(1,-1)$, $F_2(5,-1)$, $e=\dfrac{2}{3}$, $x=\dfrac{15}{2}$, $x=-\dfrac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

13.2. Установите, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найдите его центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис: а) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$; б) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

Ответ: а) $C(-1,2)$, $a=5$, $b=4$, $e=\dfrac{3}{5}$, $x=\dfrac{22}{3}$, $x=-\dfrac{28}{3}$;

б) $C(1,-2)$, $a=2\sqrt{3}$, $b=4$, $e=\dfrac{1}{2}$, $y=6$, $y=-10$.

13.3. Установите, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найдите ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот: а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; б) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

Ответ: а) $C(2,-3)$, $a=3$, $b=4$, $e=\dfrac{5}{3}$, $x=\dfrac{19}{5}$, $x=\dfrac{1}{5}$,

$4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$;

б) $C(2,-1)$, $a=3$, $b=4$, $e=\dfrac{5}{4}$, $y=2{,}2$, $y=-4{,}2$,

$4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$.

13.4. Установите, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найдите ее вершину, параметр p, фокус и директрису: а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$; в) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; г) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

Ответ: а) $y^2 = 4(x-2)$, $A(2,0)$, $p = 2$, $F(3,0)$, $x = 1$;

б) $x^2 = -(y-2)$, $A(0,2)$, $p = -\frac{1}{2}$, $F\left(0,\frac{7}{4}\right)$, $y = \frac{9}{4}$;

в) $(x-6)^2 = -6(y+1)$, $A(6,-1)$, $p = -3$, $F\left(6,-2\frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{1}{2}$.

г) $(y-3)^2 = \frac{1}{2}(x+4)$, $A(-4,3)$, $p = \frac{1}{4}$, $F\left(-3\frac{7}{8},3\right)$, $x = -4\frac{1}{8}$.

Дополнительные задачи.

13.5. Вычислите фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если $y(M) = 6$.

Ответ: 6.

13.6. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси OX направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Напишите уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от параболы.

Ответ: $y = 18$.

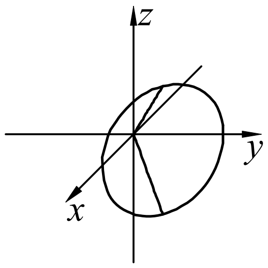
Занятие 14.
Поверхности второго порядка.

1. Цилиндры.	
2. Эллипсоид:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. Однополостный гиперболоид:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. Двуполостный гиперболоид:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.
5. Эллиптический параболоид:	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
6. Гиперболический параболоид:	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.
7. Конус:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

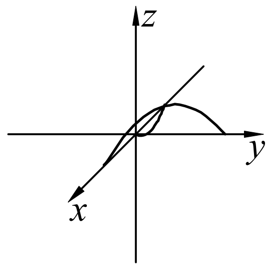
Требования.

1. Указывать тип поверхности.
2. Отмечать масштаб и точки пересечения поверхности с осями.
3. Масштаб по оси OX (OY) 1:2.
4. Ось OZ всегда вертикальна (кроме седла).
5. В плоскости YOZ (XOZ) нет искажений.
6. Изображать часть седла.

$z^2 = xy$: Конус



$z = xy$: Седло



Задачи для разбора у доски.

14.1. Укажите тип поверхностей и постройте их: а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$; б) $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$; в) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$; г) $z = x^2 + y^2$; д) $x^2 - y^2 = z^2$; е) $x^2 = 2z$; ж) $x = 2 + y^2 + z^2$; з) $x^2 - y^2 = 4$; и) $x^2 - y^2 = -z$; к) $y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

14.2. Постройте тела, ограниченные поверхностями: а) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 4$; б) $x^2 + y^2 = 4$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$, $z = 1$, I октант.

Задачи для самостоятельного решения.

14.3. Указать тип поверхностей и построить их: а) $x^2 - y^2 + (z-1)^2 + 4 = 0$; б) $(x+2)^2 + z^2 - \frac{y^2}{16} = 0$.

14.4. Постройте тела, ограниченные поверхностями: а) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; б) $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$ ($z \ge 0$); в) $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$, I октант.

Занятие 15.

Линии в полярной системе координат.

Задачи для разбора у доски.

15.1. Запишите уравнения линий в полярной системе координат: а) $y = x$; б) $x^2 + y^2 = a^2$; в) $x^2 + y^2 = ax$.

Ответ: а) $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$; б) $\rho = a$; в) $\rho = a\cos\varphi$.

15.2. Запишите уравнения линий в декартовых координатах: а) $\rho = 5$; б) $\mathrm{tg}\,\varphi = -1$; в) $\rho\cos\varphi = 2$; г) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Ответ: а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $y = -x$; в) $x = 2$; г) $x - y - 1 = 0$.

15.3. Постройте в необобщенной полярной системе координат: а) $\rho = a\sin 2\varphi$ (двух лепестковая роза); б) $\rho = a\cos 5\varphi$ (пяти лепестковая роза).

Задачи для самостоятельного решения.

15.4. Постройте в необобщенной полярной системе координат: а) $\rho = \dfrac{\varphi}{\pi}$ (спираль Архимеда); б) $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$ (улитка Паскаля); в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).

15.5. Постройте в необобщенной полярной системе координат фигуры, ограниченные линиями: а) пересечение фигур $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ и $\rho = 2 - \cos 4\varphi$; б) пересечение фигур $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ и $\rho = 2 + \sin\varphi$; в) $\rho = tg\varphi$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

15.6. Напишите каноническое уравнение кривой в декартовой системе координат и постройте ее: $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$.

Ответ: $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Занятие 16.

Линии в полярной системе координат и в параметрическом виде.

Задачи для разбора у доски.

16.1. Постройте линию, заданную параметрически: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ (астроида).

Задачи для самостоятельного решения.

16.2. Перейдите к декартовому заданию и постройте линии: а) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Ответ: а) $x + 4y - 6 = 0$; б) $x^2 + y^2 = a^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

16.3. Постройте линию, заданную параметрически: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоида).

16.4. Постройте линии в полярной системе координат: а) $\rho^4 = 16\cos^2\varphi$; б) $\rho^2 = \dfrac{1}{2} - \cos^2\varphi$; в) $\rho = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\sqrt{4\cos^2\varphi - 3}$.

16.5. Постройте линию, перейдя к полярной системе координат: а) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли); б) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (четырех лепестковая роза).

Ответ: а) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; б) $\rho = a|\sin 2\varphi|$.

Занятие 17.

Модульная работа №2.

Версия:	1.00
Дата:	18.04.2012
Автор:	Изаак Д.Д.